

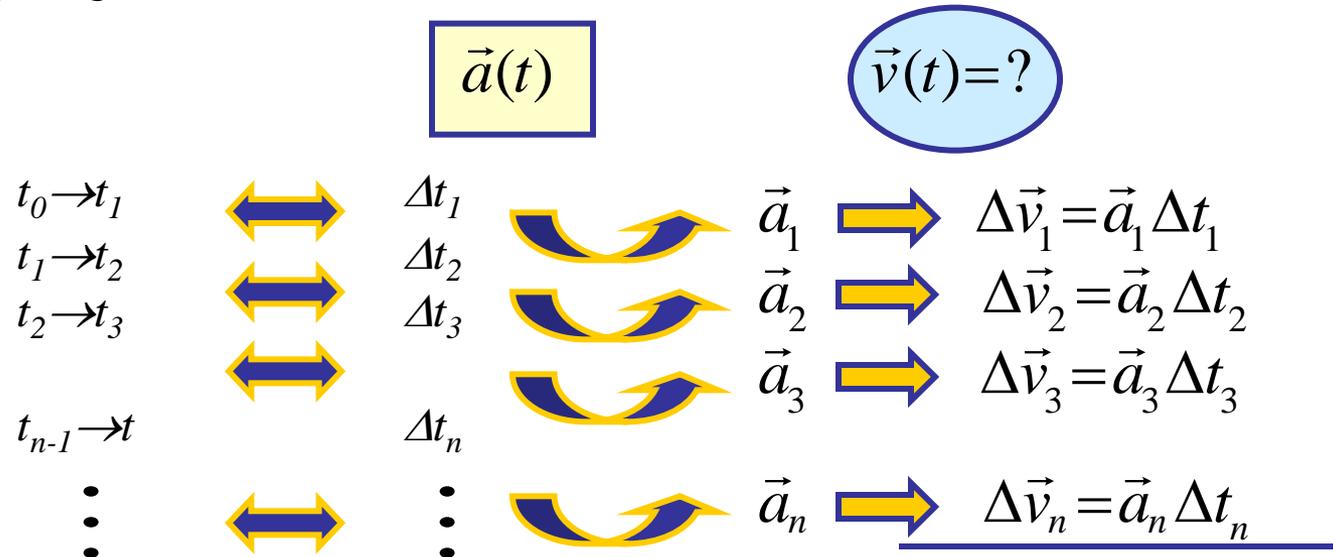


Aula 02

Da aceleração para a posição

Movimento de um projectil

Equações da Cinemática, da Aceleração para a Velocidade



$$\Delta \vec{v} = \sum_{k=1}^n \vec{a}_k \Delta t_k$$

$$\Delta \vec{v} = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \vec{a}_k \Delta t_k = \int_{t_0}^t \vec{a} dt$$

$$t = t_0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a} dt \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} v_x = v_{0x} + \int_{t_0}^t a_x dt \\ v_y = v_{0y} + \int_{t_0}^t a_y dt \\ v_z = v_{0z} + \int_{t_0}^t a_z dt \end{cases}$$

$$\vec{v}(t)$$

$$\vec{r}(t) = ?$$

$t_0 \rightarrow t$ \longleftrightarrow n intervalos Δt_k \rightarrow \vec{v}_k \rightarrow $\Delta \vec{r} = \sum_{k=1}^n \vec{v}_k \Delta t_k$

$$\Delta \vec{r} = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \vec{v}_k \Delta t_k = \int_{t_0}^t \vec{v} dt$$

$$t = t_0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v} dt \longleftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \int_{t_0}^t v_x dt \\ y = y_0 + \int_{t_0}^t v_y dt \\ z = z_0 + \int_{t_0}^t v_z dt \end{cases}$$

CASOS PARTICULARES

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a\vec{i} \\ \vec{v}_0 &= v_0\vec{i} \\ t_0 = 0 &\Rightarrow x = x_0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_0\vec{i} + \vec{i} \int_0^t a dt = (v_0 + at)\vec{i} \\ \vec{r} &= x_0\vec{i} + \vec{i} \int_0^t v_0 dt + \vec{i} \int_0^t at dt = x_0\vec{i} + \vec{i} (v_0t + \frac{1}{2}at^2) \end{aligned}$$

Movimento unidimensional uniformemente acelerado

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a\vec{j} \\ \vec{v}_0 &= v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j} \\ t_0 = 0 &\Rightarrow \\ &\Rightarrow x = x_0; y = y_0 \end{aligned}$$

Movimento bidimensional (exemplo movimento do projectil)

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = a \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} + at \end{cases} \Rightarrow \vec{r} \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

Exercício

A aceleração dum corpo é dada por $\vec{a} = (2t\vec{i})\text{m/s}^2$. O corpo parte da origem das coordenadas com velocidade inicial, $\vec{v}_0 = (-2\vec{j})\text{m/s}$. Determine o vector posicional como função do tempo e o deslocamento do corpo em 3,0 s.

$$\begin{array}{l}
 \vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a} dt \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} v_x = v_{0x} + \int_{t_0}^t a_x dt \\ v_y = v_{0y} + \int_{t_0}^t a_y dt \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} v_x = t^2 \\ v_y = -2 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \vec{v} = t^2\vec{i} - 2\vec{j} \\
 \\
 \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v} dt \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + \int_{t_0}^t v_x dt \\ y = y_0 + \int_{t_0}^t v_y dt \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x = t^3/3 \\ y = -2t \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \vec{r} = \frac{t^3}{3}\vec{i} - 2t\vec{j}
 \end{array}$$

A aceleração dum corpo é dada por $\vec{a} = (2t\vec{i})\text{m/s}^2$. O corpo parte da origem das coordenadas com velocidade inicial, $\vec{v}_0 = (-2\vec{j})\text{m/s}$. Determine o vector posicional como função do tempo e o deslocamento do corpo em 3,0 s.

$$\vec{r} = \frac{t^3}{3}\vec{i} - 2t\vec{j} \quad \longrightarrow \quad \vec{r}(t=3) = 9\vec{i} - 6\vec{j} \quad \longrightarrow \quad \Delta\vec{r}(t=3) = 9\vec{i} - 6\vec{j}$$

$$\vec{r}(t=0) = 0\vec{i} - 0\vec{j}$$

Como os versores cartesianos são constantes no tempo pode integrar-se a versão vectorial

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a} dt = -2\vec{j} + t^2\vec{i} \quad \longrightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v} dt = -2t\vec{j} + \frac{t^3}{3}\vec{i}$$

Movimento de um Projéctil

Um objecto pode mover-se simultaneamente nas direcções dos eixos dos x e dos y ;

Ao movimento bidimensional em que a componente da aceleração segundo o eixo horizontal (em geral, o eixo dos x) é nula e a componente da aceleração segundo o eixo vertical (em geral, o eixo dos y) é constante, dá-se o nome de **movimento de um projéctil**.

A aceleração de queda livre, \vec{g} , é constante durante todo o movimento

Aponta para baixo

Despreza-se a resistência do ar;

Nestas condições, um objecto com movimento de projectil seguirá uma trajectória parabólica.

Problema

As personagens principais do filme “Speed”, que em Portugal teve o nome “Terror na Auto-estrada”, viajam num autocarro em que existe uma bomba, que rebentará se a velocidade do autocarro se tornar inferior a 80 km/h.

O autocarro viaja na direcção de um viaduto, cujo tabuleiro está interrompido numa extensão de 15 m.

Os ocupantes decidem fazer o autocarro saltar de um lado para o outro do viaduto, “voando” através do espaço. A rampa que conduz ao viaduto tem uma inclinação de 5° em relação à horizontal e o autocarro viajava a 110 km/h quando entrou no viaduto.

No filme, o autocarro salta com sucesso.



O problema que nos propomos é o seguinte:

A cena apresentada no filme é realista, isto é, naquelas condições um autocarro real conseguiria saltar ou é tudo ficção de cinema?

Dados:

Módulo da velocidade inicial: $|\vec{v}_0| = 110 \text{ km/h}$

Ângulo que a velocidade inicial faz com a horizontal: $\theta_0 = 5^\circ$

Distância horizontal a transpor: $\ell = 15 \text{ m}$

Pretende-se determinar se, nestas condições a trajectória de voo do autocarro irá passar no outro lado do viaduto ou na zona em que o tabuleiro está interrompido.

Modelo utilizado:

- Vamos considerar o autocarro como pontual;
- Vamos desprezar a resistência do ar.

Vamos escolher o sistema de referência

O eixo dos x é horizontal

O eixo dos y é vertical e aponta para cima

Colocamos a origem no ponto em que o autocarro deixa o tabuleiro

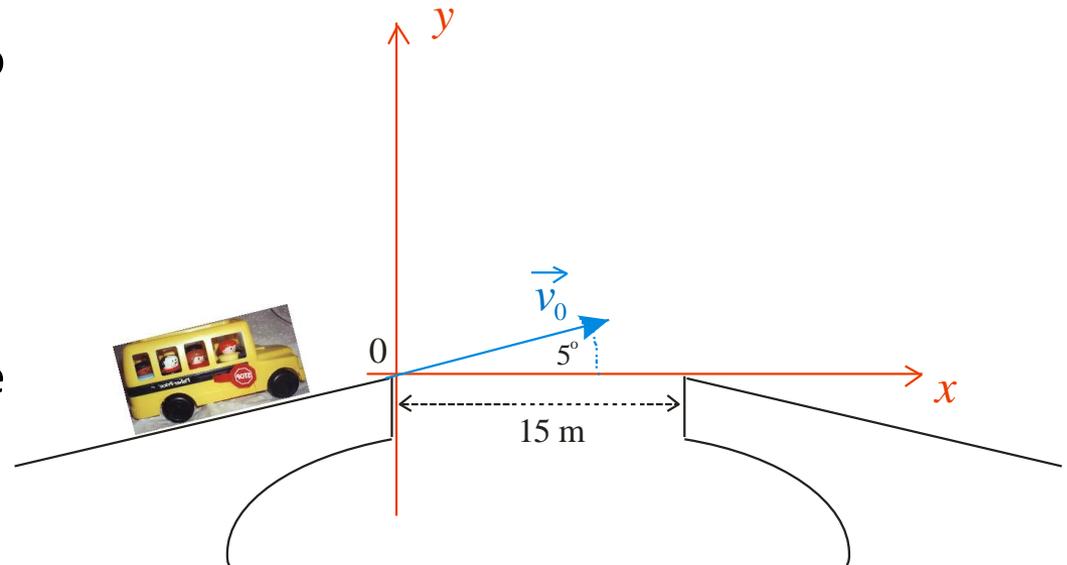
Fazemos $t = 0$ no instante em que o autocarro deixa o tabuleiro

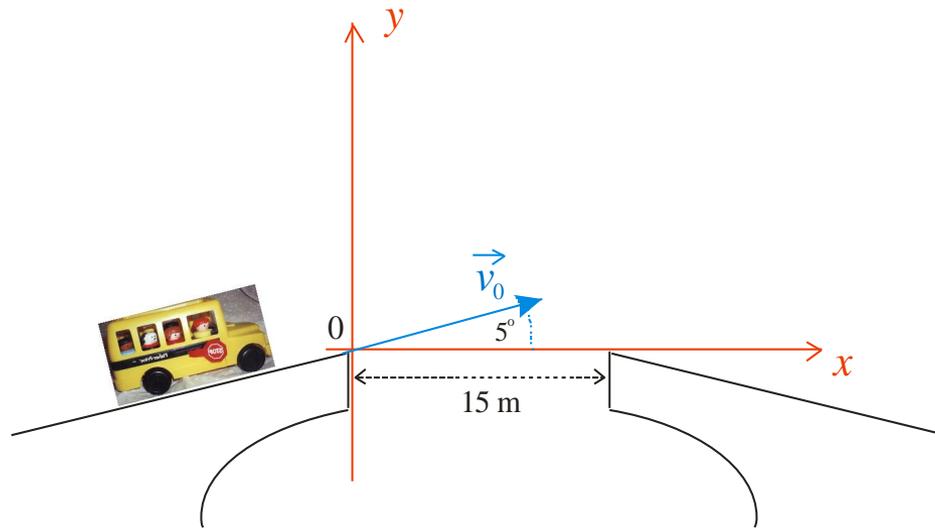
Componentes da aceleração
neste sistema de referência

$$a_y = -g \text{ e } a_x = 0$$

Componentes da velocidade
inicial

$$v_{x0} = v_0 \cos \theta_0 \text{ e } v_{y0} = v_0 \sin \theta_0$$





$$v_0 = 110 \text{ km/h} = 30,6 \text{ m/s}$$

$$a_y = -g$$

$$x_0 = y_0 = 0$$

$$\vec{a} = a\vec{j}$$

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$$

$$t_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = x_0; y = y_0$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = a \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} + at \end{cases} \Rightarrow \vec{r} \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos \theta \\ v_y = v_0 \sin \theta - gt \end{cases} \Rightarrow \vec{r} \begin{cases} x = v_0 \cos \theta t \\ y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Obtenção da Equação da Trajectória

Componentes do deslocamento, a partir da origem do referencial, no instante de tempo t

$$x = v_{x0} t = (v_0 \cos \theta) t$$

$$y = v_{y0} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Combinando estas equações :

$$y = (\tan \theta_0) x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} \right) x^2$$

Esta equação é da forma $y = ax - bx^2$ que é a equação de uma parábola

Análise do Movimento de um Projétil

Pode considerar-se este movimento como a sobreposição dos movimentos nas direcções dos eixos dos x e dos y ;

Na direcção do eixo dos x a velocidade é constante porque $a_x = 0$

Na direcção do eixo dos y o movimento é de queda livre $a_y = -g$ (porque o eixo dos y aponta para cima)

A posição num determinado instante de tempo é dada por:

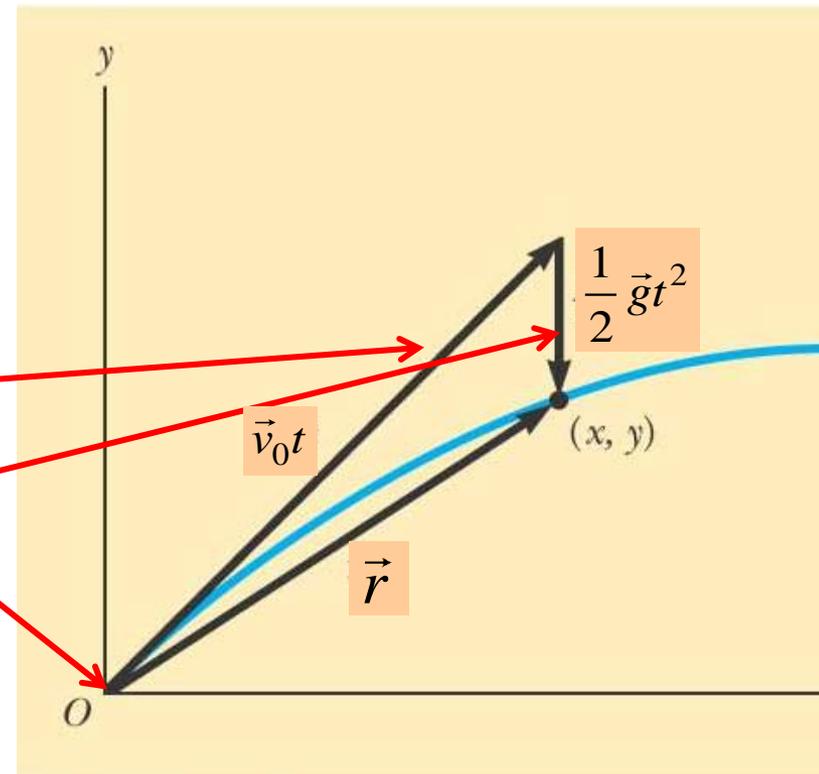
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$$

Vectores no Movimento de um Projéctil

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$$

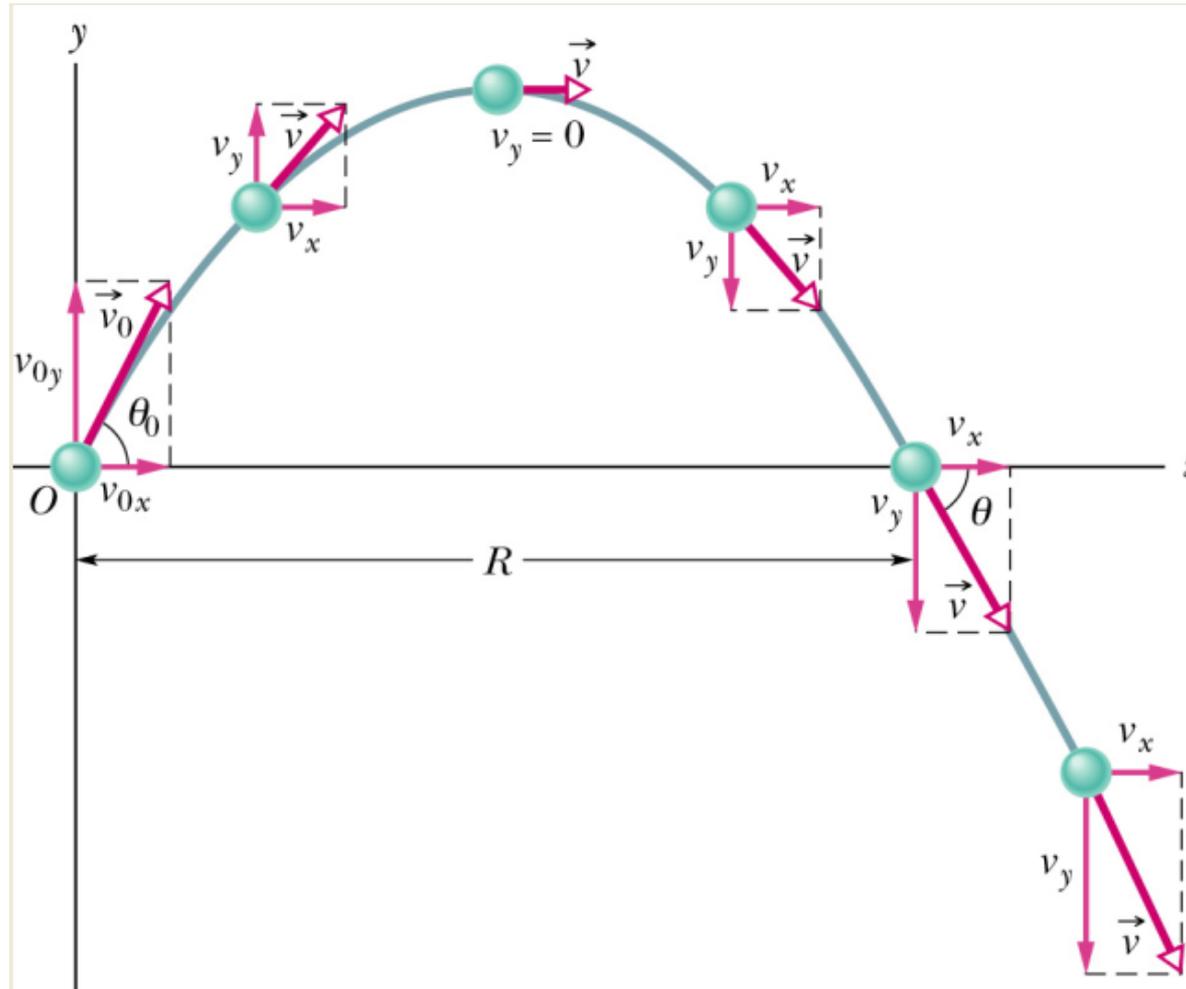
A posição final é o vector soma de:

- posição inicial
- deslocamento resultante da velocidade inicial
- deslocamento resultante da aceleração



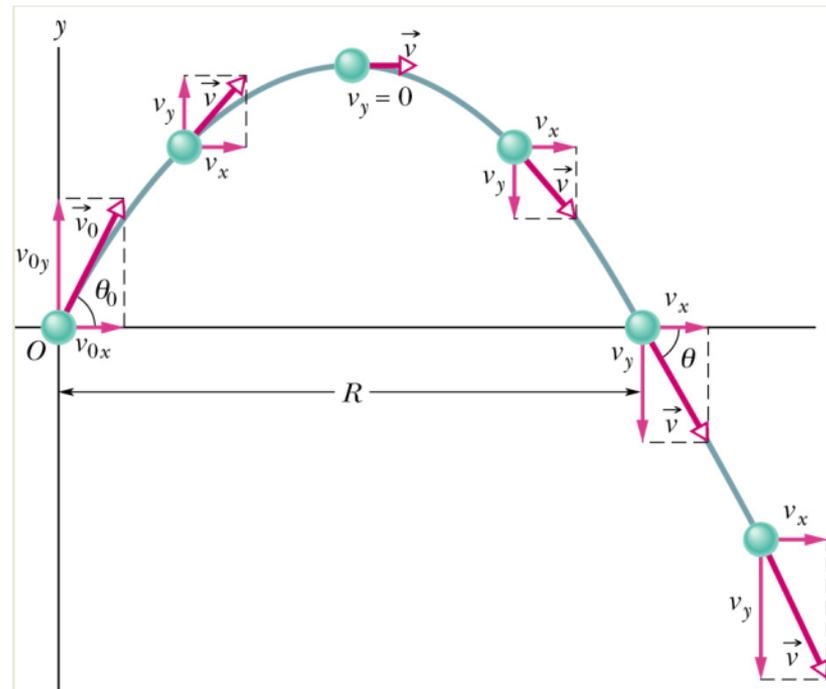
© 2004 Thomson/Brooks Cole

Diagrama do Movimento de um Projectil



Características do Movimento de um Projétil

- A componente da velocidade segundo o eixo dos x é constante em todos os pontos da trajectória;
- A componente da velocidade segundo o eixo dos y é nula na altura máxima da trajectória;
- A aceleração é a mesma em todos os pontos da trajectória.

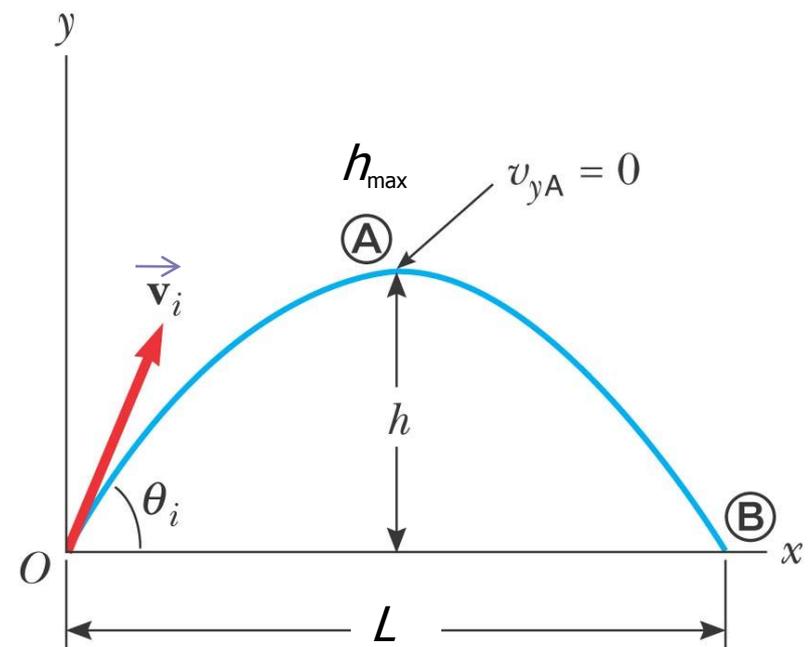


Alcance e Altura Máxima de um Projétil

Na análise do movimento de um projétil há duas grandezas com interesse especial;

O **alcance**, L , é a distância horizontal alcançada pelo projétil;

A **altura máxima** atingida pelo projétil é h_{\max} .



© 2004 Thomson/Brooks Cole

Equação da Altura Máxima de um Projectil

A altura máxima do projectil ocorre no instante em que a componente vertical da velocidade é nula. Fazemos $v_y = 0$ na equação

$$v_y = v_{0y} - gt$$

para obtermos o tempo de subida $t_{\text{sub}} = \frac{v_{0y}}{g}$

A altura máxima de um projectil é obtida substituindo este instante de tempo na expressão da coordenada vertical

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

conduzindo a $h_{\text{max}} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$

Equação do Alcance de um Projectil

O alcance de um projectil obtém-se fazendo $y_f = 0$ na expressão

$$y_f = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

para obter o tempo de voo, $t_{\text{voo}} = \frac{2v_{0y}}{g}$

Substituindo $t = t_{\text{voo}}$ na expressão $x = v_{0x} t$

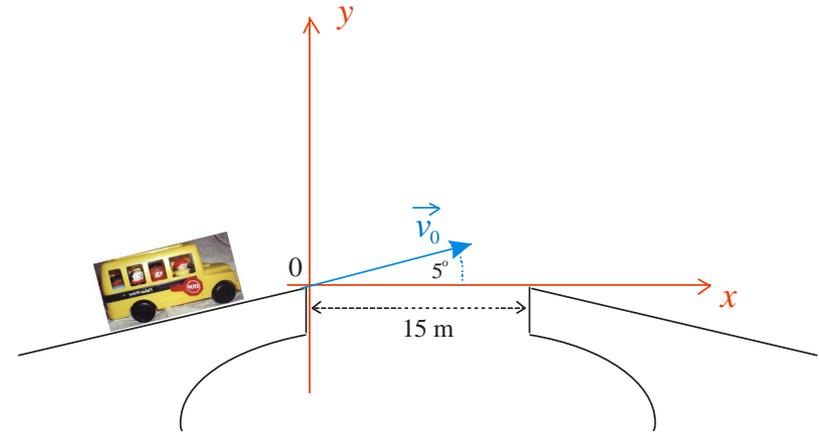
obtemos o alcance $L = \frac{2v_{0x} v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$

Problema

O que pretendemos saber é se o alcance é superior ou inferior a 15 m.

Substituímos os dados do problema na expressão do alcance

Obtemos:



$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{(30.6 \text{ m/s})^2 \sin 10^\circ}{9.8 \text{ m/s}^2} = 16.5 \text{ m}$$

Efectivamente, o autocarro transpõe o obstáculo!!!

Alcance de um Projéctil

O valor máximo do alcance ocorre para $\theta_i = 45^\circ$;

Ângulos complementares dão origem ao mesmo valor do alcance;

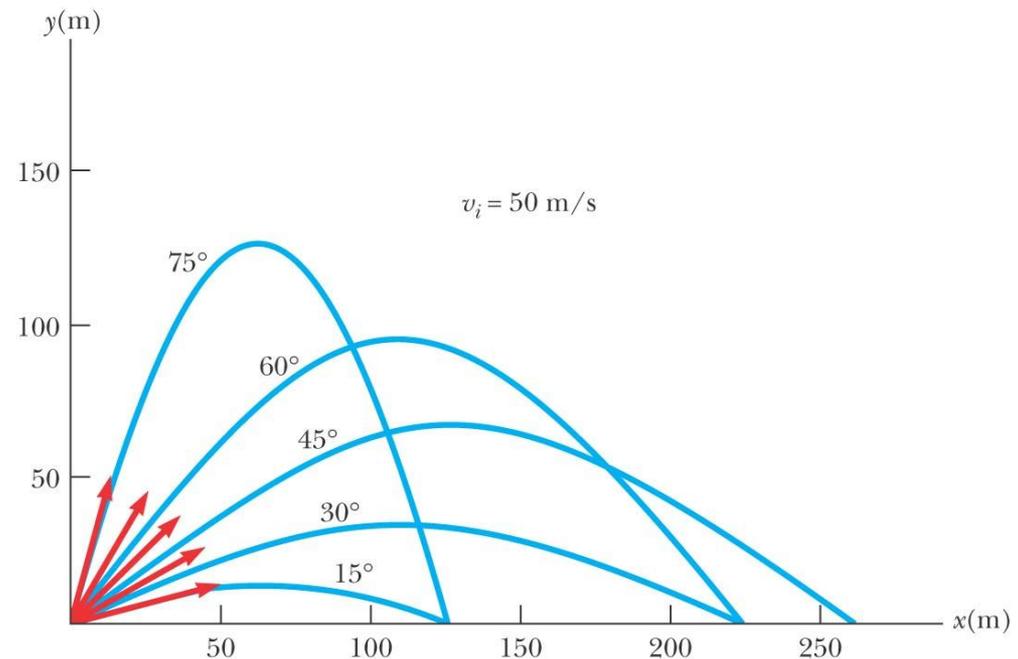
A altura máxima é diferente para os dois valores do ângulo da velocidade inicial;

Os tempos de voo serão diferentes para os dois ângulos;

$$L = \frac{2v_{0x} v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

$$h_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$$

$$t_{\text{voo}} = \frac{2v_{0y}}{g}$$



© 2004 Thomson/Brooks Cole

Movimento de um Projéctil

Técnicas para resolução de Problemas

1. Seleccionar um sistema de coordenadas;
2. Obter as componentes da velocidade inicial segundo os eixos dos x e dos y ;
3. Analisar a componente horizontal do movimento utilizando as técnicas do movimento com velocidade constante;
4. Analisar a componente vertical do movimento utilizando as técnicas do movimento com aceleração constante;
5. Recordar que o tempo é comum a ambas as componentes.

Aula 02

Forças e movimentos I

Força e movimento

Mecânica Newtoniana

A Primeira Lei de Newton

Força

Referenciais inerciais

Massa

A Segunda Lei de Newton

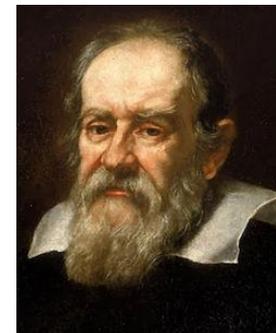
Alguns tipos de forças

A força gravítica

O peso

As Forças

Galileu Galilei



- Qual é a causa do movimento dos corpos?
- Se um corpo estiver imóvel, ficará para sempre imóvel?
- A experiência do dia-a-dia diz-nos que não. O corpo eventualmente poderá mover-se.
- E o que é que significa estar em repouso?
- Um corpo pode estar imóvel em relação a um observador e estar em movimento em relação a outro observador?

As Forças

O que é que provoca a alteração do repouso ou do movimento de um corpo?

Foi Isaac Newton que deu a resposta esta pergunta: o que altera o estado de movimento de um corpo é a força que se exerce sobre ele.



Características de uma força:

- há um agente que exerce a força;
- há um corpo no qual a força é exercida;
- o agente empurra ou puxa o corpo em que se exerce a força;
- a força tem uma direcção, um sentido e uma intensidade sendo, portanto, um **vector**;
- exerce-se através de contacto ou exerce-se à distância.

As Forças

O que é uma força?

Temos todos a noção que exercer uma força num corpo é empurrar ou puxar esse corpo.

Sabemos também que se actuarmos com a mesma força em corpos com massas diferentes, vamos provocar resultados diferentes na alteração do movimento desses corpos.

Se é uma força que modifica o estado de movimento ou de repouso de um corpo, com que característica do movimento está a força directamente relacionada?

Foi ainda Newton que respondeu a esta questão:

As Forças

Se uma força é exercida num corpo, irá provocar a variação da velocidade desse corpo, ou seja, a força é proporcional à aceleração do corpo.

Esta é a Segunda Lei de Newton e apresenta-se, normalmente, na forma:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

As Forças

Primeira Lei de Newton (Lei da inércia)

Na ausência de forças externas, quando observado em relação a um sistema de referência, um corpo em repouso permanece em repouso e um corpo em movimento continua a mover-se com *velocidade constante*.

A Primeira Lei de Newton descreve o que acontece na ausência de uma força;

Afirma ainda que *quando nenhuma força actua num corpo, a aceleração desse corpo é nula*.

As Forças

1.ª Lei de Newton (Lei da inércia) – Versão mais correcta

Se um corpo não interactua com outros corpos, é possível identificar um sistema de referência em que esse corpo tem aceleração nula;

A este sistema de referência chama-se referencial de inércia.

As Forças

Qualquer sistema de referência que se move com velocidade constante em relação a um referencial de inércia é, ele próprio, um referencial de inércia;

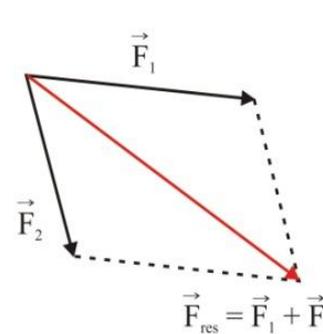
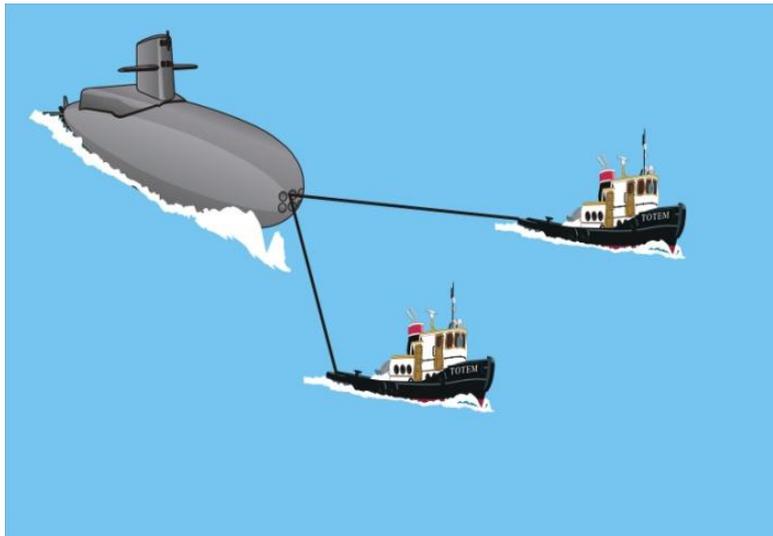
Um sistema de referência que se move com velocidade constante em relação às estrelas distantes é a melhor aproximação a um referencial de inércia;

Podemos considerar a Terra como um referencial de inércia, ainda que possua uma aceleração centrípeta de pequeno módulo associada ao seu movimento de rotação.

As Forças

Quando duas ou mais forças actuam num corpo, podemos calcular a força resultante, adicionando vectorialmente essas forças.

A aceleração de um corpo sujeito a estas forças é também a resultante da adição vectorial das acelerações que cada uma das forças, actuando isoladamente, provocaria no corpo:



$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_{res} = m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2$$

$$\vec{F}_{res} = m\vec{a}_{res}$$

Força

As forças são as causas das alterações da velocidade de um corpo

A força é uma grandeza *vectorial*

Uma força dá origem a uma aceleração

A ***força resultante*** é o vector soma de todas as forças que actuam num corpo;

À força resultante também se dá o nome de força total.

Força Resultante Nula

Quando a força resultante é nula:

A aceleração é nula

A velocidade é constante

Há ***equilíbrio*** quando a força resultante é nula

O corpo sujeito a essa força, se está em repouso, permanece em repouso;

Se o corpo está em movimento, continuará a mover-se com velocidade constante.

Segunda Lei de Newton

Quando observada num sistema de referência de inércia, a aceleração de um corpo é directamente proporcional à força resultante que nele actua e é inversamente proporcional à sua massa.

A força é a causa da variação do movimento, sendo essa variação medida pela *aceleração*.

Algebricamente,
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Segunda Lei de Newton

$\sum \vec{F}$ é a força resultante

É a soma vectorial de todas as forças que actuam no corpo

Podemos exprimir a Segunda Lei de Newton em termos das componentes:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \\ \sum F_z = ma_z \end{cases}$$

As Forças

A interacção pode existir quando os dois corpos entram em contacto, como no caso do choque das bolas de bilhar, ou quando estão longe um do outro, como no caso da Lua e da Terra.

É habitual chamar **interacção** (ou força) **de contacto** à que ocorre apenas quando os corpos que interactuam se encontram em contacto e **interacção** (ou força) **à distância** à que tem lugar mesmo quando os corpos estão separados.

As Forças

Exemplos de interacções de contacto:

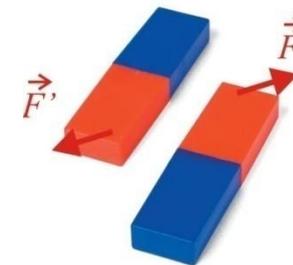
- Força exercida pela mesa num monitor de computador, e que o impede de cair;
- Força exercida pela mão numa porta e que provoca o movimento desta;
- Força exercida pelo pé numa bola e que a faz mover.



As Forças

Exemplos de interacções à distância:

- Força exercida pela Terra num corpo e que o faz cair;
- Força entre dois ímanes que se encontram próximos um do outro, mas não encostados, e que os faz aproximarem-se ou afastarem-se um do outro;



Classes de Forças

As forças de contacto exigem contacto físico entre dois corpos

As forças de campo actuam através de espaço vazio

Não é exigido contacto físico



A nível microscópico
todas as forças são forças de campo !!!

Forças Fundamentais

Força gravitacional (ou gravítica)

Entre dois corpos – alcance infinito

Força electromagnética

Entre duas cargas eléctricas – alcance infinito

Força nuclear forte

Entre partículas subatómicas – alcance muito curto

Força nuclear fraca

Ocorre em alguns processos de decaimento radioactivo

Inércia e Massa

À tendência de um corpo para resistir a qualquer tentativa de alteração da sua velocidade dá-se o nome de ***inércia***;

A ***massa*** é a propriedade de um corpo que especifica a intensidade da resistência que o corpo apresenta às modificações da sua velocidade.

A Massa

A massa é uma propriedade inerente ao corpo;

A massa é independente do que rodeia o corpo;

A massa é independente do método utilizado para a medir;

A massa é uma grandeza escalar;

A unidade SI de massa é o kg.

A Força Gravítica

A força gravítica da Terra, \vec{F}_g , é a força que a Terra exerce num corpo;

A direcção e o sentido desta força são para o centro da Terra;

À força gravítica dá-se o nome de peso;

$$\text{Peso} = \vec{F}_g = m\vec{g}$$

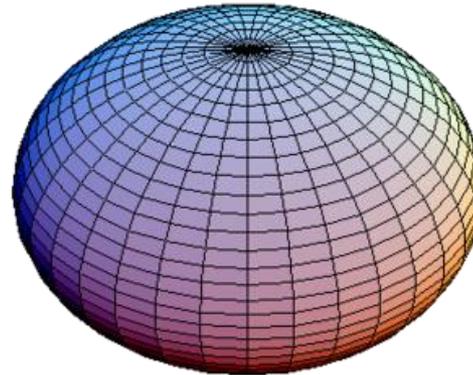


Peso

O peso varia com o local porque depende de g

O valor de g diminui com a altitude

(e diminui com a latitude, porque a Terra é levemente achatada nos polos)



O peso *não* é, portanto, uma propriedade intrínseca de um corpo.

Massa gravítica e Massa Inercial

Nas Leis de Newton, “massa” é a “massa inercial” e mede a resistência do corpo à alteração do seu estado de movimento;

Na força gravítica, a “massa (gravítica)” determina a atracção gravítica entre um corpo e a Terra;

A experiência mostra que a massa gravítica e a massa inercial têm o mesmo valor.

Unidades

Unidades de massa, aceleração e força

Sistema de Unidades	Massa	Aceleração	Força
SI	kg	m/s^2	$\text{N} = \text{kg m/s}^2$

Exemplos – Exercícios – Questões

Um corpo na Terra tem 10 kg de massa e 98 N de peso.

- Se o corpo for transportado para um planeta em que a força da gravidade seja um quarto da força de gravidade na Terra, quais serão os valores da massa e do peso do corpo nesse planeta?
- Se o planeta tiver a mesma massa que a Terra, quanto vale o seu raio em relação ao da Terra?

Duas forças horizontais estão aplicadas num corpo de 1 kg de massa; uma de 4 N faz 30° com uma direcção que tomamos como eixo dos x e a outra de 3 N faz 60° com a primeira.

- Qual é a intensidade da resultante das duas forças?
- Qual é o ângulo que faz com o eixo dos x?
- Se apenas estiverem estas forças aplicadas no corpo, quais são as componentes da aceleração segundo, x, y e z.